# PRESEK

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 2
Strani 68–73



Vilko Domajnko:

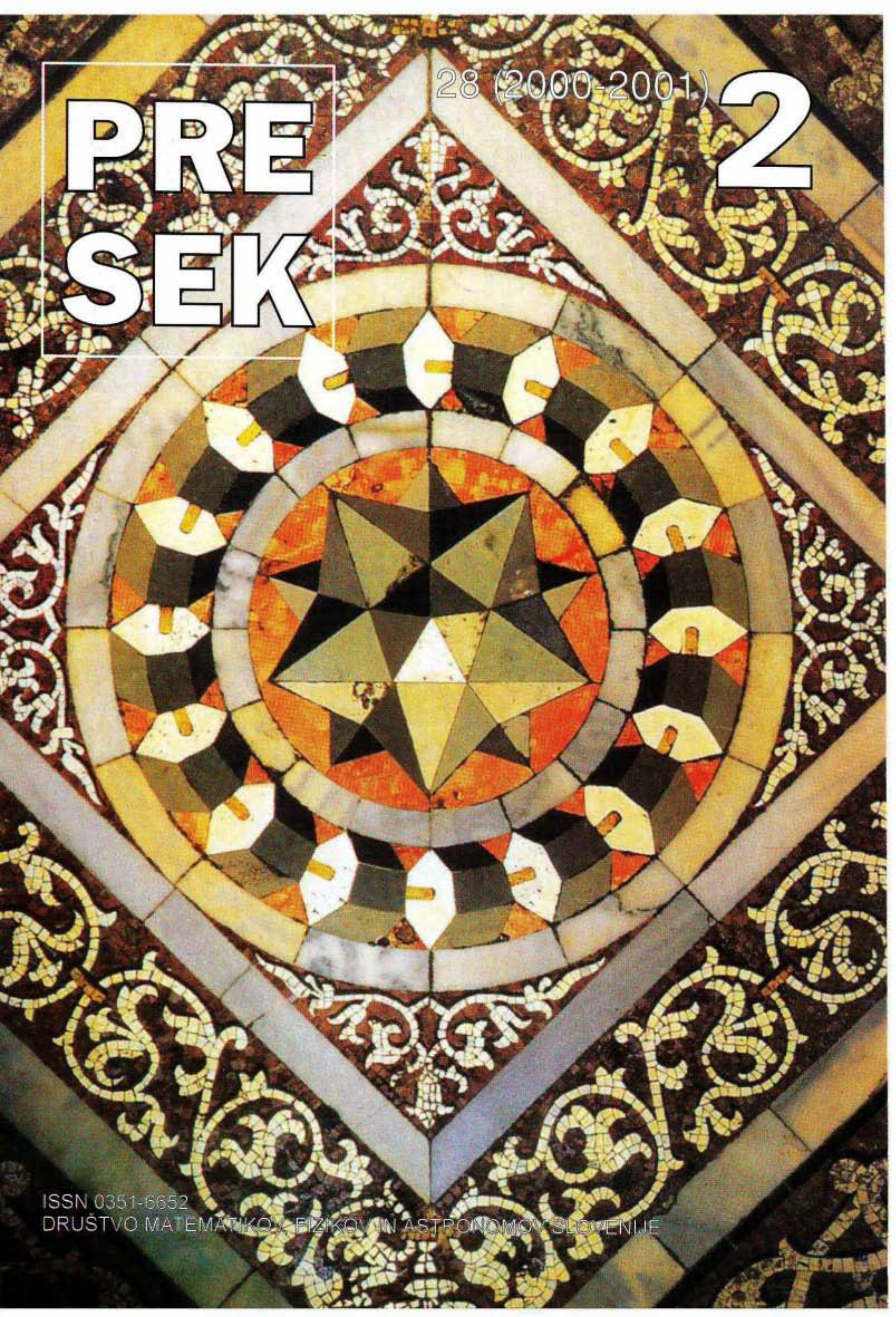

## ZVEZDNI POLIEDRI


Ključne besede: matematika, geometrija, pravilni poliedri, mreže, zgodovina matematike.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1432-Domajnko.pdf

# PRESEK

28 (2000-2001) 2



ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

# ZVEZDNI POLIEDRI

Kadar v matematiki postavljamo definicijo novega pojma, se tega običajno lotimo izkustveno. Vendar se nam lahko pri tem zgodi, da se pod definiranim pojmom skriva več, kakor smo imeli v mislih v začetku. Lep primer za to je definicija pravilnih poliedrov. Ko se je stoletja dolgo zdelo, da so malodane vse, kar se skriva pod tem pojmom, vedeli že stari Grki, se je na lepem obrnilo drugače. A pojdimo po vrsti.

*Pravilni ravninski večkotnik* je definiran kot lik, ki ima skladne vse stranice in skladne vse notranje kote. Vemo, da zadošča tema zahtevama neskončno mnogo likov (enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petkotnik).

Vzemimo oglišča $A_1, A_2, \ldots A_n$ poljubnega pravilnega $n$-kotnika, šteta v nasprotni smeri urinega kazalca. Izberimo naravno število $k$ $(0 < k < n)$ in povežimo oglišča z daljicami

$$A_1A_{1+k},\ A_2A_{2+k},\ A_3A_{3+k},\ A_4A_{4+k},\ \ldots\ A_nA_{n+k}\,.$$

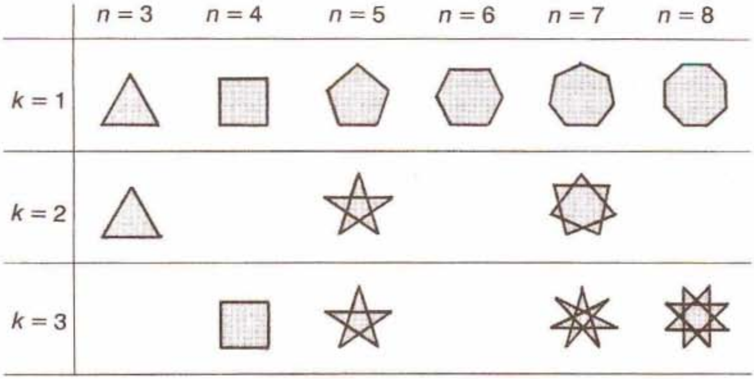
Če pri tem indeks $i+k$ oglišča $A_{i+k}$ preseže število $n$, ga spremenimo v $i+k-n$. Za vsak izbor števil $n$ in $k$ dobimo eno ali več sklenjenih lomljenk. Domenimo se, da bomo pri tem izpustili vse tiste primere, kjer razpade opisani obhod po vseh $n$ točkah $A_i$ v več kakor eno samo sklenjeno lomljenko (npr.: $n=6$, $k=2$). Opazujmo območja, ki jih ograjujejo te lomljenke.

Pri izboru $k=1$ dobimo "običajne" pravilne $n$-kotnike, saj povezujemo med seboj kar vsa sosednja oglišča večkotnika. Pri $k=2$ povezujemo med seboj vsako drugo oglišče v zaporedju, pri $k=3$ vsako tretje itd. (slika 1).

Naj nas ne zbega, ker se stranice večkotnikov pri $k>1$ med seboj tudi sekajo. Rekli bomo, da je večkotnik *enostaven*, če se noben par njegovih stranic ne seka; v nasprotnem primeru je *neenostaven*. Pri tem presečišč stranic neenostavnega večkotnika ne štejemo za oglišča.

Zanimivo je, da definiciji pravilnega večkotnika zadoščajo tudi liki pri vrednostih $k>1$. Zaradi njihove oblike se jih je oprijelo ime *zvezdni večkotniki*. Prav tako je očitno, da so vsi enostavni pravilni večkotniki konveksni (izbočeni). Med zvezdnimi večkotniki seveda ni konveksnih.

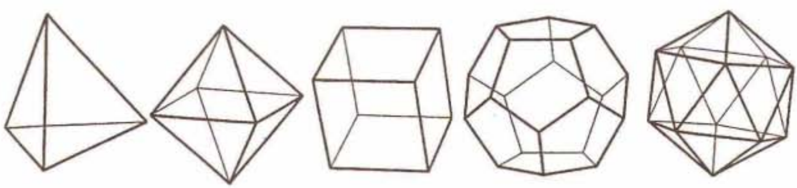
Zvezdne večkotnike lahko dobimo tudi s pomočjo podaljškov stranic pravilnih konveksnih večkotnikov, ki se sekajo. Denimo: zvezdni petkotnik dobimo tako, da podaljšamo stranice konveksnega petkotnika. Oba načina sta enakovredna, to je, omogočata konstrukcijo kateregakoli zvezdnega večkotnika.




Slika 1.

Poskusimo s posplošitvijo večkotnikov še nekoliko drugače. Poglejmo, ali obstaja podoben splošnejši opis tudi za pravilne poliedre. Spomnimo se: polieder je *pravilen*, če so vse njegove stranske ploskve pravilni in med seboj skladni večkotniki in če se v vsakem njegovem oglišču stika enako število robov.

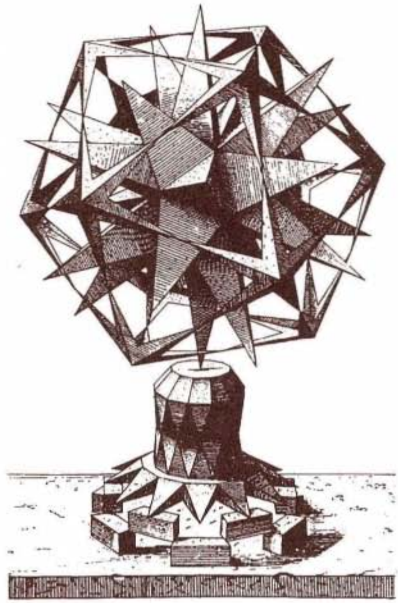
Že starogrški matematik Evklid (365–300 pr.n.št.) je v svojih *Elementih* dokazal, da je pravilnih poliedrov samo pet, in sicer tetraeder, oktaeder, kocka, dodekaeder in ikozaeder (slika 2).



Slika 2.

Pravimo jim tudi Platonovi poliedri (Platon jim je namreč dodelil pomembno vlogo pri svoji razlagi ustroja sveta). Ne smemo pa pozabiti, da so imeli matematiki antičnega obdobja v mislih le konveksne poliedre.

Težko je reči, kdaj so odkrili prvi nekonveksni pravilni polieder, saj o tem nimamo zadostnih podatkov. Znana je mozaična podoba malega zvezdnega dodekaedra (glej naslovno stran) na tleh bazilike Sv. Marka v Benetkah (okrog leta 1420), ki jo pripisujemo slikarju Paolu Uccellu. Zelo blizu zvezdnim poliedrom so tudi nekatere risbe iz dela *O zlatem rezu* italijanskega matematika Luca Paciolija (1445–1514), ki jih je domnevno narisal Leonardo da Vinci, vse pozornosti pa je vredna tudi risba nemškega umetnika Wentzelna Jamnitzerja iz sredine 16. stoletja (slika 3). Prvi, ki je obširneje pisal o teh telesih in čigar delo se je ohranilo do danes, pa je bil nemški astronom in matematik Johannes Kepler (1571–1630).



Slika 3. Iz Jamnitzerjevega dela Perspektiva pravilnih teles.

Kepler je sicer znan predvsem kot astronom. Odkril je, da se planeti gibljejo okrog Sonca po eliptičnih tirih in razložil osnovne zakone tega gibanja. Zanimivo pa je, da je pri svojem razmišljanju o zgradbi Osončja predvsem v zgodnejših letih delovanja izhajal iz t.i. poliederskega modela, ki je v osnovi določen s petimi pravilnimi poliedri. Takšni nazori so ga pritegnili k poglobljenemu študiju poliedrov nasploh.

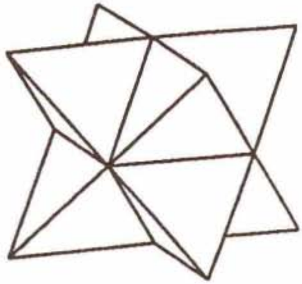
V svojem najpomembnejšem delu *Harmonija sveta* (Harmonices mundi, 1619) je Kepler povzel svoja odkritja v astronomiji. Pri svoji, precej mistično zasnovani razlagi harmonije sveta, je v veliki meri uporabljal tudi jezik matematike. Vse življenje se je namreč držal načela, da je prav geometrija praslika lepote sveta. Tako najdemo v tem delu tudi prvi poskus temeljitejše klasifikacije poliedrov. Kepler je poliedre delil na konveksne in nekonveksne. Med prvimi je posebej izpostavil pet pravilnih in trinajst polpravilnih.[1] Zanimivo je, da je pravilne poliedre odkril tudi med nekonveksnimi. Čeprav Kepler samega postopka, ki ga je pripeljal do odkritja, ni opisal, ga je vendarle mogoče rekonstruirati.

Johannes Kepler

[1] Glej: T. Pisanski, *Uniformni poliedri*, Presek 1993–94, št. 4.

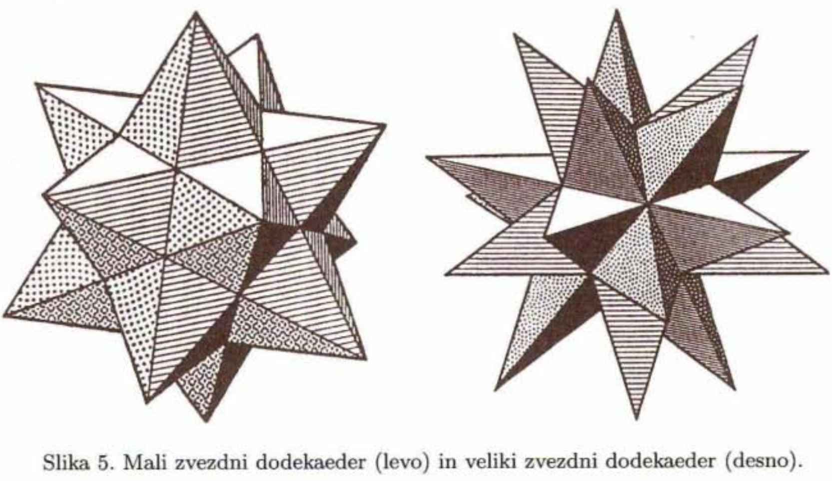
Omenili smo že, da lahko dobimo zvezdne večkotnike tudi s podaljški stranic pravilnih konveksnih večkotnikov. Ta postopek posplošimo v prostor na ta način, da za vsak pravilen polieder razširimo njegove ploskve v ravnine, pri čemer se vsaka seka vsaj z eno od preostalih. V nekaterih primerih dobimo z območjem, ki ga ograjujejo te ravnine, novi polieder.

Pri tetraedru in kocki dobimo na ta način enako telo. Polieder, ki ga dobimo z razširitvijo ploskev oktaedra, je Kepler imenoval *stella octangula* (slika 4). Že sam je opazil, da ga ne moremo šteti kot novo telo, saj je pravzaprav sestavljen iz dveh tetraedrov. Zaradi tega spada med t.i. *sestavljene poliedre*, ki so bili v veliki meri znani že tudi pred Keplerjem. Metoda razvrščanja je v primeru stelle octangule podobna kakor pri zvezdnih večkotnikih, kjer štejejo le tisti, ki so ograjeni z eno samo sklenjeno lomljenko.



Slika 4. Stella octangula.

Povsem novi telesi, ki v matematični literaturi do Keplerjevega časa nista bili znani, dobimo z razširitvijo ploskev dodekaedra in ikozaedra. Kepler ju je sprva imenoval *mali* in *veliki morski ježek*. Danes sta v literaturi znani pod imenoma *mali zvezdni dodekaeder* in *veliki zvezdni dodekaeder* (slika 5). Uvedel ju je angleški matematik Arthur Cayley (1859).



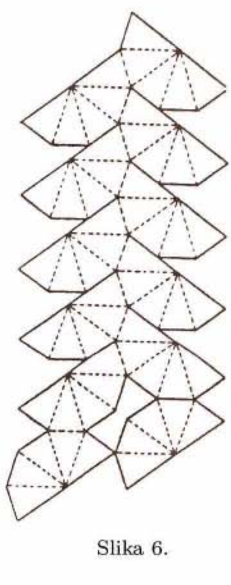
Slika 5. Mali zvezdni dodekaeder (levo) in veliki zvezdni dodekaeder (desno).

Obe telesi zadoščata definiciji pravilnega poliedra. Njune stranske ploskve so namreč med seboj skladni zvezdni petkotniki, pri malem zvezdnem dodekaedru se jih v vsakem oglišču stika po pet, pri velikem pa po trije. Za razliko od preprostejših poliedrov, pri katerih se stranske ploskve le stikajo vzdolž robov, se njune ploskve tudi sekajo, podobno, kakor se sekajo stranice zvezdnih večkotnikov. Oba zvezdna dodekaedra spadata zaradi svojih "bodic" med nekonveksne poliedre.

Mali zvezdni dodekaeder ima 12 stranskih ploskev (v vsakem od 12 oglišč se jih stika po pet) in 30 robov. Njegova oglišča so hkrati oglišča očrtanega ikozaedra. Veliki zvezdni dodekaeder ima prav tako 12 stranskih ploskev, pri čemer se v vsakem od 20 oglišč stikajo po tri, in spet 30 robov. Njegova oglišča so razmeščena v ogliščih dodekaedra.

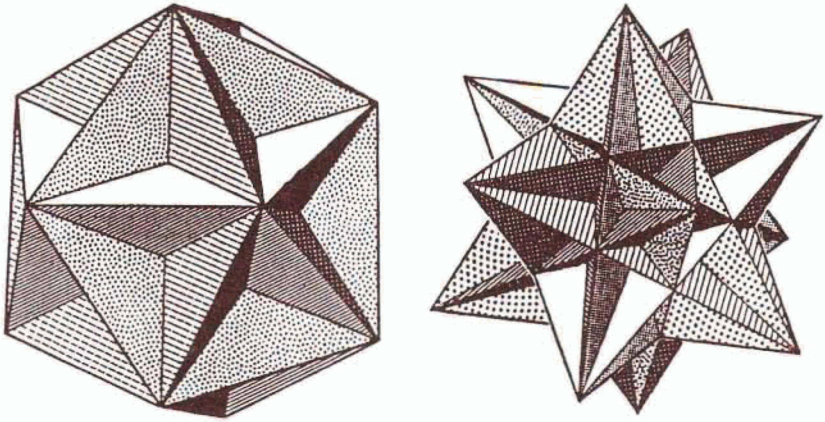
Morda bo koga zamikalo izdelati tudi papirnata modela obeh zvezdnih poliedrov. Za model velikega zvezdnega dodekaedra je najenostavneje, če napravite model ikozaedra in nad vsako njegovo ploskev prilepite tristrano piramido. Seveda je rob osnovne ploskve te piramide enako dolg kot rob ikozaedra, kot stranske ploskve piramide ob vrhu pa meri 36°, saj je to pravzaprav kot v pravilnem zvezdnem petkotniku. Na podoben način izdelate tudi model malega zvezdnega dodekaedra: na vsako stransko ploskev dodekaedra nalepite petstrano piramido. Za dimenzije teh piramid veljajo enake opombe kot v prejšnjem primeru.

Občudovalci papirnatih modelov poliedrov seveda najraje izdelajo svoj model iz enega samega kosa papirja. Njim je namenjena mreža malega zvezdnega dodekaedra na sliki 6. Sestavljajo jo zgolj plašči omenjenih petkotnih piramid.



Slika 6.

Leta 1809 je francoski matematik Louis Poinsot odkril še dva pravilna nekonveksna poliedra, in sicer *veliki dodekaeder* ter *veliki ikozaeder* (slika 7). Kmalu zatem pa je leta 1813 francoski matematik Augustin-Louis Cauchy dokazal, da poleg štirih že znanih ne obstaja več noben drug nekonveksen pravilni polieder. S tem je postala zgodba o pravilnih poliedrih zaključena: pet je konveksnih (Platonovi poliedri), štirje pa nekonveksni (Kepler-Poinsotovi poliedri).



Slika 7. Veliki dodekaeder (levo) in veliki ikozaeder (desno).

Zanimivo je, da dva Keplerjev-Poinsotova poliedra ne zadoščata Eulerjevi poliederski formuli. Ta pravi, da je $o + p = r + 2$, kjer je $o$ število, oglišč, $p$ število ploskev, $r$ pa število robov poliedra. Za vajo ju poskusite sami poiskati.

*Vilko Domajnko*