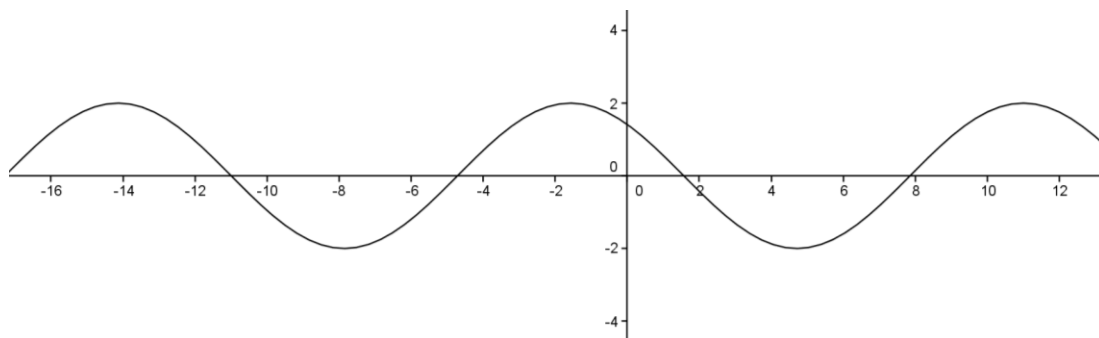


VIR: Matematika, zbirka maturitetnih nalog z rešitvami 1995-2006, Transcendentne funkcije in enačbe, stran 145, naloga 51, Ljubljana 2006, Državni izpitni center.

Funkcija f je dana s predpisom $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

- a) Izračunajte ekstreme te funkcije in narišite njen graf.

REŠEVANJE BREZ RAČUNALNIŠKIH ORODIJ



Ta funkcija doseže največjo vrednost $y = 2$ in najmanjšo vrednost $y = -2$. Sedaj izračunamo za katere vrednosti x , doseže najmanjšo in največjo vrednost. Izračunajmo prvo maksimume.

$$2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Naša funkcija ima maksimume v točkah s koordinatami $(-\frac{\pi}{2} + 4k\pi, 2)$, za $k \in \mathbb{Z}$. Sedaj izračunamo še minimume.

$$2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

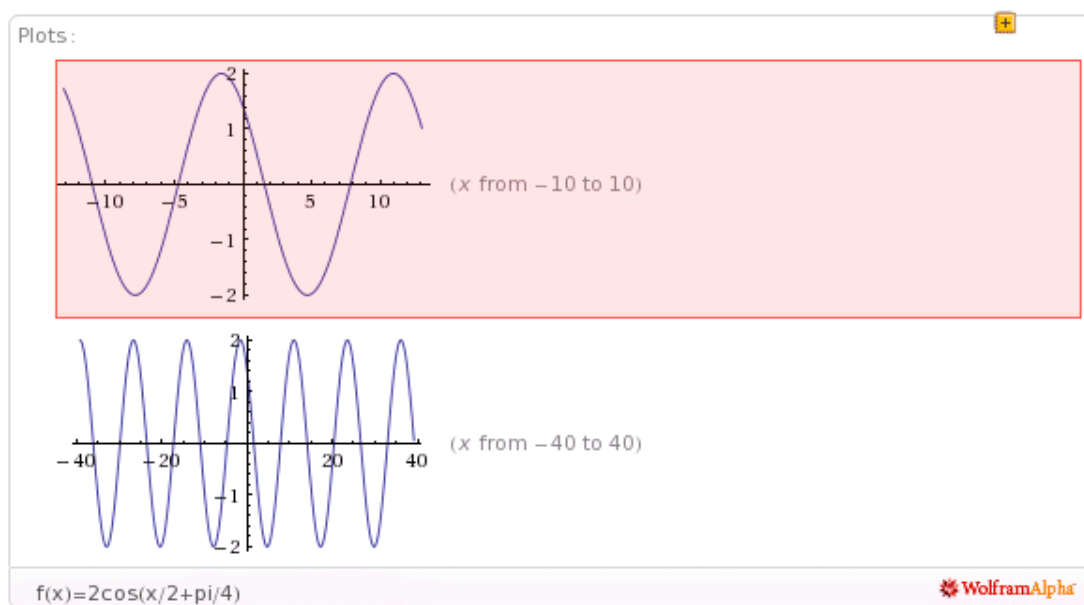
Naša funkcija ima minimume v točkah s koordinatami $(\frac{3\pi}{2} + 4k\pi, -2)$, za $k \in \mathbb{Z}$.

REŠEVANJE Z RAČUNALNIŠKIMI ORODJI

Ta del naloge sem rešila s pomočjo Wolfram Alpha. V ukazno okno sem vnesla naslednje:



Dobila sem sliko grafa funkcije f in tudi iskane ekstreme funkcije.



Global maxima :

Approximate form

$$\max\left\{f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = 2 \text{ at } x = -\frac{\pi}{2} + 4n\pi \text{ for integer } n$$

$$f(x)=2\cos(x/2+pi/4)$$

WolframAlpha

Global minima :

Approximate forms

$$\min\left\{f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = -2 \text{ at } x = \frac{3\pi}{2} + 4n\pi \text{ for integer } n$$

$$\min\left\{f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = -2 \text{ at } x = -\frac{5\pi}{2} + 4n\pi \text{ for integer } n$$

$$f(x)=2\cos(x/2+pi/4)$$

WolframAlpha

To je iskana rešitev tega dela naloge, ki je enaka izračunani brez uporabe računalniških orodij.

b) Izračunajte presečišča grafa s premico $y = 1$.

REŠEVANJE BREZ RAČUNALNIŠKIH ORODIJ

Presečišče grafa s premico $y = 1$ dobimo tako, da ju najprej izenačimo in nato izračunamo vrednosti x -ov, ki so ravno iskana presečišča.

$$1 = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

1. Rešitev: $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{(8-6)\pi}{12} + 4k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 4k\pi$

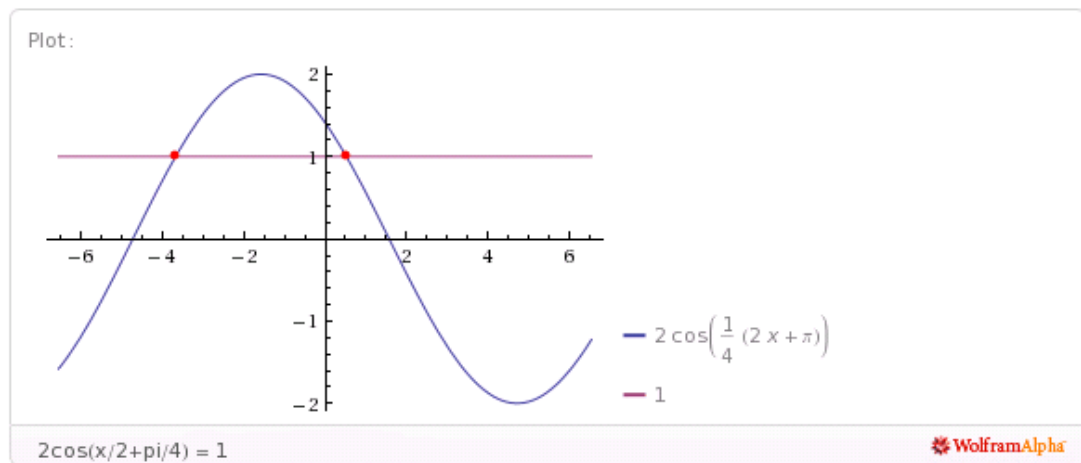
2. Rešitev: $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{(-8-6)\pi}{12} + 4k\pi \rightarrow x = -\frac{7\pi}{6} + 4k\pi$

REŠEVANJE Z RAČUNALNIŠKIMI ORODJI

Tudi ta del naloge sem rešila s pomočjo Wolfram Alpha. Tokrat sem v ukazno okno vnesla naslednje:



Dobila sem graf funkcij $y = 1$ in $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, ter izračunani vrednosti presečišč med funkcijama.



Results: Show steps

$$x = \pi \left(4n - \frac{7}{6} \right) \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi \left(4n + \frac{1}{6} \right) \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ is the set of integers ➤

solve $2 \cos(x/2 + \pi/4) = 1$

WolframAlpha

Dobljeni rešitvi sta enaki rešitvama dobljenima brez uporabe računalniških orodji.

c) Izračunajte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

REŠEVANJE BREZ RAČUNALNIŠKIH ORODIJ

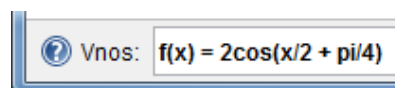
Najprej izračunamo nedoločen integral in nato vstavimo še meje.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 - 2\sqrt{2}$$

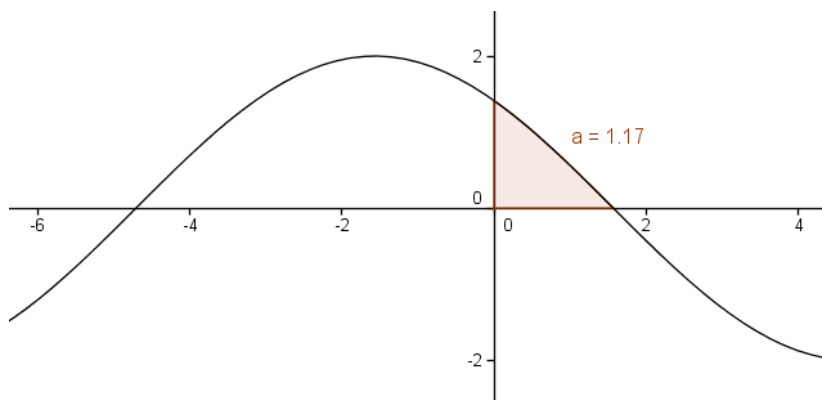
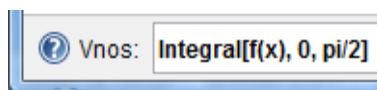
REŠEVANJE Z RAČUNALNIŠKIMI ORODJI

Ta del naloge bi prav tako lahko rešil s pomočjo Wolfram Alpha, vendar sem se odločila, da ga bom rešila s pomočjo GeoGebre.

Najprej sem v ukazno okno vnesla enačbo funkcije $f(x)$.



Nato pa sem uporabila še ukaz `Integral [f(x), 0, pi/2]`, ki nam izračuna vrednost integrala funkcije $f(x)$ v mejah od 0 do $\frac{\pi}{2}$.



Torej rezultat je enak 1.17, kar je enakovredno izračunanemu integralu brez uporabe računalniških orodij, saj $1.17 \cong 4 - 2\sqrt{2}$.